JOURNAL OF APPROXIMATION THEORY 17, 119–134 (1976)

Duale Hermite–Birkhoff-Probleme

KURT JETTER

Fachbereich Mathematik der Eberhard-Karls-Universität, 7400 Tübingen, West Germany

Communicated by G. G. Lorentz

Received October 4, 1974

This paper studies the problem of Hermite–Birkhoff interpolation with splines. Interpolation knots and spline knots may be considered as "dual" elements. This leads to a dual problem which is poised if and only if the original problem is poised. Estimations of the number of zeros in the appropriate interpolation kernel yield a Cauchy type representation of the interpolation error for certain cases of Hermite problems.

EINLEITUNG

Sei $-1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = +1$ eine Knotenverteilung, $E = (e_{i,j})_{i=0}^{n+1}{}_{j=0}^{m-1}$ — $e_{i,j} = 0$ oder $= 1$ — eine Inzidenzmatrix und S eine Funktionenklasse mit $\dim S = |E| := \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{m-1} e_{i,j}$. Unter dem Problem der Hermite–Birkhoff Interpolation versteht man die Fragestellung, wann die Interpolationsaufgabe

$$s \in S, \quad s^{(j)}(x_i) = y_i^j, \quad \text{falls } e_{i,j} = 1, \tag{J}$$

bei beliebiger Wahl der Zahlen y_i^j eindeutig lösbar ist.

Der Sonderfall der Polynominterpolation wurde erstmals von Birkhoff [2] untersucht, 1966 von Schoenberg [10] wiederaufgegriffen und in den darauffolgenden Jahren von verschiedenen Autoren eingehend behandelt (vgl. das ausführliche Literaturverzeichnis von Sharma [12]). Wir befassen uns hier mit dem allgemeineren Problem, dass unter S eine Klasse von Splinefunktionen verstanden wird. Charakterisiert man S anhand einer weiteren Knotenverteilung $-1 < z_1 < z_2 < \cdots < z_k < +1$ und einer zweiten Inzidenzmatrix E^*, so führt eine "duale" Betrachtungsweise von Splineknoten und Interpolationsknoten auf ein zu (J) duales Problem (J^*).

Objekt unserer Betrachtungen sind die zu (J) bzw. (J^*) gehörenden Interpolationskerne, die in die Peano–Darstellung des Interpolationsfehlers eingehen. Diese Kerne zeichnen sich durch eine gegenseitige Symmetrie aus, auf der die in Kapitel 2 bewiesene Aussage "(J) *ist genau dann frei* (poised), *wenn* (J^*) *frei ist*" aufbaut.

Eine verallgemeinerte Form des Satzes von Rolle liefert in Satz 3.2 eine Abschätzung für die Anzahl der Nullstellen von Interpolationskernen. Im Unterschied zu entsprechenden Nullstellenbetrachtungen von Lorentz [8] an Birkhoff–Kernen wählten wir eine Definition der Nullstellenvielfachheit, die Vorzeichenwechsel mit Nullstellen ungerader Ordnung gleichsetzt. Satz 3.4 zeigt, dass sich die Aussage von Lorentz [8, Theorem 1] auch für unsere Betrachtungen beweisen lässt. Dies verdeutlicht den wesentlichen Einfluss gestützter ungerader Sequenzen auf solche Nullstellenabschätzungen.

Eine Anwendung der in Abschnitt 3 bewiesenen Abschätzungen liefert Definitheitsaussagen für die Interpolationskerne gewisser Hermite-Probleme (Satz 4.1 bzw. Satz 4.2). Dadurch lassen sich alle Hermite-Probleme charakterisieren, für die der Interpolationsfehler eine "verallgemeinerte Cauchy–Darstellung" besitzt.

1. Problemstellung

Zu natürlichen Zahlen $m \geqslant 1$, $n \geqslant 0$, $k \geqslant 0$ und fest vorgegebenen reellen Knoten

$$\begin{aligned} -1 &=: x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} := +1, \\ -1 &=: z_0 < z_1 < \cdots < z_k < z_{k+1} := +1 \end{aligned} \tag{1.1}$$

betrachten wir zwei Inzidenzmatrizen

$$E = (e_{i,j})_{i=0}^{n+1}{}_{j=0}^{m-1}, \qquad E^* = (e^*_{p,q})_{p=0}^{k+1}{}_{q=0}^{m-1} \tag{1.2}$$

—$e_{i,j}$ und $e^*_{p,q} = 0$ oder $= 1$—mit folgenden Zusatzvoraussetzungen:

a. *Die inneren Zeilen von E und E^* seien keine Nullzeilen.*

b. $e_{i,j} + e^*_{p,m-1-j} = 1$ *für* $j = 0,\ldots, m-1$, *falls* $(i, p) = (0, 0)$ *oder* $(i, p) = (n+1, k+1)$. (1.3)

c. $e_{i,j} + e^*_{p,m-1-j} \leqslant 1$ *für* $j = 0,\ldots, m-1$, *falls* $x_i = z_p$. (1.4)

d. $$m + \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=0}^{m-1} e^*_{p,q} = \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0}^{m-1} e_{i,j}\,. \tag{1.5}$$

Aus (1.3) und (1.5) folgt offensichtlich

$$m + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} e_{i,j} = \sum_{p=0}^{k+1} \sum_{q=0}^{m-1} e^*_{p,q}\,. \tag{1.5*}$$

Mit $y_+^r := y^r$ für $y > 0$ und $:= 0$ für $y \leqslant 0$ definieren wir reelle Funktionenklassen $(0! := 1)$

$$S := \left\{ s \,\middle|\, s(t) = \sum_{p=0}^{m-1} a_p \frac{t^p}{p!} + \sum_{\substack{p=1 \\ e^*_{p,q}=1}}^{k} \sum_{q=0}^{m-1} a_{p,q} \frac{(t - z_p)_+^{m-1-q}}{(m-1-q)!} \right\}$$

und

$$S^* := \left\{ s \,\middle|\, s(t) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i \frac{t^i}{i!} + \sum_{\substack{i=1 \\ e_{i,j}=1}}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} a_{i,j} \frac{(t - x_i)_+^{m-1-j}}{(m-1-j)!} \right\}.$$

Ziel unserer Betrachtungen sind Aussagen über die folgenden beiden Spline-Interpolationsprobleme mit Birkhoff-Bedingungen:

$$\begin{aligned} &s \in S, \quad s^{(j)}(x_i) = y_i^j, \qquad \text{falls } e_{i,j} = 1, \\ &i = 0,\dots, n+1, \qquad j = 0,\dots, m-1; \end{aligned} \tag{J}$$

$$\begin{aligned} &s \in S^*, \quad s^{(q)}(z_p) = \bar{y}_p^q, \qquad \text{falls } e^*_{p,q} = 1, \\ &p = 0,\dots, k+1, \qquad q = 0,\dots, m-1. \end{aligned} \tag{J^*}$$

Dabei seien y_i^j und $\bar{y}_p^q$ beliebige reelle Zahlen, die wir künftig als Ableitungen $f^{(j)}(x_i)$ bzw. $f^{(q)}(z_p)$ einer reellen Funktion f interpretieren wollen. Bedingung (1.4) garantiert, dass alle erforderlichen Ableitungen für die interpolierenden Splines existieren, und wegen $\dim S = m + \sum_{p=1}^{k} \sum_{q=0}^{m-1} e^*_{p,q}$, $\dim S^* = m + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} e_{i,j}$ folgt aus (1.5) und (1.5*), dass den Problemen (J) und (J^*) quadratische Koeffizientenmatrizen der Dimension $\dim S$ bzw. $\dim S^*$ zugeordnet sind.

Wir betonen, dass (J) und (J^*) nur dann definiert sind, wenn alle vier Elemente $X := (-1, x_1, \dots, x_n, 1)$, $Z := (-1, z_1, \dots, z_k, 1)$, E und E^* fest vorgegeben sind. Die inneren Zeilen von E und E^* können hierbei unter der Einschränkung (1.4) unabhängig voneinander gewählt werden, während sich die äusseren Zeilen von E und E^* durch die "Dualitätsforderung" (1.3) gegenseitig bestimmen. E^* ist demnach genau dann allein durch E eindeutig bestimmt, falls $k = 0$, also (J) ein polynomiales Birkhoff Problem ist.

(J) oder (J^*) nennen wir frei (poised), wenn das zugehörige homogene Problem nur die triviale Lösung $s = 0$ besitzt. Ist dies der Fall, so hat (J) bzw. (J^*) stets eine eindeutige Lösung, und es lässt sich jeder reellen Funktion, welche die vorkommenden Ableitungen hat, ein eindeutig bestimmter Interpolationsspline $\mathfrak{I}(f)$ bzw. $\mathfrak{I}^*(f)$ aus S bzw. S^* zuordnen. Funktionen aus S bzw. S^*, insbesondere Polynome vom Höchstgrad $m - 1$, werden durch die Operatoren $\mathfrak{I}$ bzw. $\mathfrak{I}^*$ reproduziert. Für jedes $x \in [-1, +1]$ können wir deshalb auf die Linearformen $L: f \to f(x) - \mathfrak{I}(f, x)$ und

$L^*: f \to f(x) - \mathfrak{I}^*(f, x)$ den Satz von Peano anwenden, so dass für die Interpolationsfehler unter der Voraussetzung $f \in C^m[-1, +1]$ die folgende Darstellung gilt:

$$f(x) - \mathfrak{I}(f, x) = \int_{-1}^{+1} f^{(m)}(t)\, k(x, t)\, dt \qquad \text{mit}$$
$$k(x, t) := 1/(m-1)!\{(x-t)_+^{m-1} - \mathfrak{I}_x[(x-t)_+^{m-1}]\}; \tag{1.6}$$

$$f(x) - \mathfrak{I}^*(f, x) = \int_{-1}^{+1} f^{(m)}(t)\, k^*(x, t)\, dt \qquad \text{mit}$$
$$k^*(x, t) := 1/(m-1)!\{(x-t)_+^{m-1} - \mathfrak{I}_x^*[(x-t)_+^{m-1}]\}. \tag{1.6*}$$

Der Index x soll verdeutlichen, dass der Interpolationsoperator $\mathfrak{I}$ bzw. $\mathfrak{I}^*$ bezüglich der Variablen x wirkt. Ist in (J) oder (J^*) eine $(m-1)$-te Ableitung vorgeschrieben, so werde in der Definition der Interpolationskerne k und k^* für $x = -1$ die rechtsseitige, sonst die linksseitige $(m-1)$-te Ableitung von $(x-t)_+^{m-1}$ betrachtet.

Offensichtlich gehen (J) und (J^*) durch Austausch von Interpolationsknoten und Splineknoten unter Berücksichtigung dualer Forderungen in den Punkten -1 und $+1$ auseinander hervor. Wir werden deshalb (J^*) als das zu (J) duale Problem bzw. (J) als das zu (J^*) duale Problem bezeichnen.

BEISPIELE.

1. $m = 3, n = 2, k = 1, X = (-1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1), Z = (-1, 0, 1)$,

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Polynomiale Birkhoff-Probleme sind dual zu Spline-Interpolationsproblemen mit zwei Interpolationsknoten.

3. Falls $X = Z$ und $E = E^*$ ist, sprechen wir von einem *selbstdualen* Problem. Für solche Probleme folgt aus (1.3), dass m gerade ist und E nur spezielle äussere Zeilen besitzt, die jeweils genau $m/2$ Einsen enthalten. Z.B. erhält man für $m = 4, n = k = 1, X = Z = (-1, 0, 1)$ und

$$E = E^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ein selbstduales Problem.}$$

Durch Integration von (1.6) und (1.6*) erhält man zwei Quadraturformeln

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \mathfrak{J}(f, x)\,dx + Rf, \qquad Rf = 0 \text{ für } f \in S, \tag{Q}$$

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \mathfrak{J}^*(f, x)\,dx + R^*f, \qquad R^*f = 0 \text{ für } f \in S^*, \tag{Q^*}$$

deren Fehler die Darstellung

$$Rf = \int_{-1}^{+1} f^{(m)}(t)\,K(t)\,dt, \qquad K(t) := \int_{-1}^{+1} k(x, t)\,dx, \tag{1.7}$$

$$R^*f = \int_{-1}^{+1} f^{(m)}(t)\,K^*(t)\,dt, \qquad K^*(t) := \int_{-1}^{+1} k^*(x, t)\,dx \tag{1.7*}$$

besitzen. Wir nennen (Q) und (Q^*) zueinander duale Integrationsformeln und K, K^* zueinander duale Peanokerne.

Falls (J) frei ist, müssen notwendig die "Verschränktheitsbedingungen"

$$m + \sum_{\substack{p=1 \\ x_{i_1} < z_p < x_{i_2}}}^{k} \sum_{q=0}^{m-1} e^*_{p,q} \geqslant \sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=0}^{m-1} e_{i,j} \tag{1.8}$$

für alle Paare i_1, i_2 mit $0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant n + 1$ gelten. Wären sie nämlich für ein Indexpaar i_1, i_2 nicht erfüllt, so würde $i_1 < i_2$ und $(i_1, i_2) \neq (0, n + 1)$ folgen, und das von (J) auf $[x_{i_1}, x_{i_2}]$ induzierte Interpolationsproblem wäre überbestimmt. In den folgenden Betrachtungen sei deshalb stets (1.8) vorausgesetzt. Eine einfache Rechnung zeigt, dass damit auch die "dualen Verschränktheitsbedingungen"

$$m + \sum_{\substack{i=1 \\ z_{p_1} < x_i < z_{p_2}}}^{n} \sum_{j=0}^{m-1} e_{i,j} \geqslant \sum_{p=p_1}^{p_2} \sum_{q=0}^{m-1} e^*_{p,q} \tag{1.8*}$$

für alle Paare p_1, p_2 mit $0 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant k + 1$ erfüllt sind.

2. Ein Dualitätssatz

Wie die folgende Aussage zeigt, besteht eine enge Verbindung zwischen der eindeutigen Lösbarkeit der Probleme (J) und (J^*).

Satz 2.1. *(J) ist genau dann frei, wenn (J^*) frei ist.*

Beweis. Falls (J) frei ist, ist der Kern k durch (1.6) wohldefiniert. Mit

$$k^*(x, t) := (-1)^m k(t, x) \tag{2.1}$$

erhalten wir wegen $(-1)^m(t-x)_+^{m-1} = (x-t)_+^{m-1} - (x-t)^{m-1}$ und $\mathfrak{J}_t[(x-t)^{m-1}] = (x-t)^{m-1}$:

$$k^*(x, t) = 1/(m-1)!\{(x-t)_+^{m-1} - \mathfrak{J}_t[(x-t)_+^{m-1}]\}, \tag{2.2}$$

und die Cramersche Regel liefert

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_t[(x-t)_+^{m-1}] &= \sum_{p=0}^{m-1} a_{p,m}(x)\frac{t^p}{p!} + \sum_{\substack{p=1\\ e^*_{p,q}=1}}^{k}\sum_{q=0}^{m-1} a_{p,q}(x)\frac{(t-z_p)_+^{m-1-q}}{(m-1-q)!}, \\ a_{p,q}(x) &= \sum_{\substack{i=0\\ e_{i,j}=1}}^{n+1}\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_{p,q}^{i,j}\frac{\partial j}{\partial t^j}(x-t)_+^{m-1}\Big|_{t=x_i} \end{aligned} \tag{2.3}$$

mit Funktionen $a_{p,q}$, die auf $(-1, +1)$ mit eindeutig bestimmten Splines aus S^* übereinstimmen.

Aus (2.2) und (2.3) folgt, dass $\partial^j/\partial t^j\, k^*(x, t)$ bezüglich der Variablen t in -1 rechtsseitig stetig und in $+1$ linksseitig stetig gegen 0 geht, falls $e_{0,j} = 1$ bzw. $e_{n+1,j} = 1$ ist. Für $x \in [-1, +1]$ und $f \in C^m[-1, +1]$ liefert deshalb wiederholte partielle Integration unter Beachtung von (1.3)

$$\int_{-1}^{+1} f^{(m)}(t)\, k^*(x, t)\, dt = f(x) - \sum_{\substack{p=0\\ e^*_{p,q}=1}}^{k+1}\sum_{q=0}^{m-1} \tilde{s}_{p,q}(x) f^{(q)}(z_p) \tag{2.4}$$

mit Funktionen $\tilde{s}_{p,q}$, die wir als Restriktion eindeutig bestimmter Funktionen $s_{p,q} \in S^*$ auf $[-1, +1]$ betrachten können. Da $\partial^j/\partial t^j\, k^*(x, t)$ für $(i, j) \in \{\{1,..., n\} \times \{0,..., m-1\}\}$, $e_{i,j} = 1$, bezüglich der Variablen t in x_i stetig ist und den Wert 0 annimmt (man beachte (1.4), (2.2), und (2.3)), gilt die Identität (2.4) auch für Funktionen $f = s \in S^*$, so dass wir wegen $s^{(m)} = 0$

$$s(x) = \sum_{\substack{p=0\\ e^*_{p,q}=1}}^{k+1}\sum_{q=0}^{m-1} s_{p,q}(x)\, s^{(q)}(z_p) \tag{2.5}$$

erhalten.

Nun gilt

$$\partial^q/\partial x^q\, k^*(x, t)\,|_{x=z_p} = 0 \qquad \text{identisch für } t \in (-1, +1), \tag{2.6}$$

falls $(p, q) \in \{\{0,..., k+1\} \times \{0,..., m-1\}\}$ und $e^*_{p,q} = 1$. Um dies einzusehen, sei erwähnt, dass die Funktion $\partial^q/\partial x^q(x-t)_+^{m-1}|_{x=z_p}$ auf $(-1,+1)$ mit einem Spline aus S übereinstimmt und folglich durch den Operator $\mathfrak{J}_t$ reproduziert wird. Offensichtlich genügt es deshalb, die Aussage

$$\partial^q/\partial x^q\, \mathfrak{J}_t[(x-t)_+^{m-1}]\,|_{x=z_p} = \mathfrak{J}_t[\partial^q/\partial x^q(x-t)_+^{m-1}\,|_{x=z_p}]$$

zu zeigen, die aber unmittelbar aus (2.3) und den wegen (1.3) und (1.4) gültigen Identitäten $d^q/dx^q[\partial^j/\partial t^j(x-t)_+^{m-1}\,|_{t=x_i}]\,|_{x=z_p} = d^j/dt^j \times [\partial^q/\partial x^q(x-t)_+^{m-1}\,|_{x=z_p}]\,|_{t=x_i}$, falls $e_{i,j}=1$, folgt.

Variiert man nun die Funktion f in (2.4), so liefert (2.6), dass die Funktionen $s_{p,q}$ gerade die zu (J^*) gehörenden "Lagrange–Grundfunktionen" sind, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} s_{p,q}^{(q')}(z_{p'}) &= 1, \qquad \text{falls } p=p' \quad \text{und} \quad q=q' \\ &= 0, \qquad \text{sonst,} \end{aligned}$$

für $(p,q),(p',q') \in \{\{0,\ldots,k+1\} \times \{0,\ldots,m-1\}\}$, $s_{p,q}^* = s_{p',q'}^* = 1$.

$$\mathfrak{J}^* : f \to \sum_{p=0}^{k+1} \sum_{\substack{q=0 \\ e^*_{p,q}=1}}^{m-1} s_{p,q} f^{(q)}(z_p)$$

ist der zu (J^*) gehörende Interpolationsoperator und k^* der entsprechende Interpolationskern.

Eine Dualisierung der bisher bewiesenen Aussage liefert schliesslich die Behauptung des Satzes.

Als grundlegende Beweisidee kann die Symmetriebeziehung (2.1) zwischen den Kernen k und k^* angesehen werden:

KOROLLAR 2.2. *Falls die Interpolationsprobleme (J) und (J^*) frei sind, gilt für alle $(x,t) \in \{(-1,+1) \times (-1,+1)\}$:*

$$k(x,t) = (-1)^m\, k^*(t,x). \tag{2.7}$$

Mit (2.7) erhalten wir schliesslich eine interpolatorische Deutung der Peanokerne K und K^*:

KOROLLAR 2.3. *Falls die Interpolationsprobleme (J) und (J^*) frei sind, gilt für die Peanokerne der zugehörigen Interpolationsquadraturen (Q) bzw. (Q^*):*

a. $K(t) = (-1)^m/m!\,\{t^m - \mathfrak{J}_t^*(t^m)\}$;

b. $K^*(t) = (-1)^m/m!\,\{t^m - \mathfrak{J}_t(t^m)\}$;

c. $\int_{-1}^{+1} K(t)\,dt = (-1)^m \int_{-1}^{+1} K^*(t)\,dt$.

Beweis. a. $K(t) = \int_{-1}^{+1} k(x, t)\,dx = (-1)^m \int_{-1}^{+1} k^*(t, x)\,dx = (-1)^m/m! \times \{t^m - \mathfrak{I}_t^*(t^m)\}$. Um die letzte Identität einzusehen, vertausche man in (1.6*) die Variablen x und t und setze $f(t) = t^m/m!$.

b. folgt durch Dualisierung der Aussage a. und c. folgt sofort aus (2.7).

3. Eigenschaften des Kerns $K(X, T)$

Im folgenden betrachten wir unter der Annahme, dass (J) frei ist, für festes $x \in (-1, +1)$ den Interpolationskern

$$k_x : t \to k(x, t) = 1/(m-1)!\{(x-t)_+^{m-1} - \mathfrak{I}_x[(x-t)_+^{m-1}]\}.$$

Offensichtlich verschwindet k_{x_i} identisch, falls $e_{i,0} = 1$ ist. Mit $X_q := \{x_i \mid i = 0,..., n+1, e_{i,q} = 1\}$, $q = 0,..., m-1$, setzen wir deshalb in den weiteren Überlegungen voraus, dass x in $\{(-1, +1)\backslash X_0\}$ liegt.

Für festes $t \in \{\mathbb{R}\backslash[-1, +1]\}$ stellt $(x-t)_+^{m-1}$ auf $[-1, +1]$ ein Polynom dar, das durch $\mathfrak{I}_x$ reproduziert wird. Deshalb gilt

$$k_x(t) = 0 \qquad \text{für alle} \quad t \in \{\mathbb{R}\backslash[-1, +1]\}. \tag{3.1}$$

Um Aussagen in Intervall $(-1, +1)$ zu erhalten, greifen wir auf die nach Korollar 2.2 gültige Darstellung von k_x zurück:

$$\begin{aligned} k_x(t) &= (-1)^m/(m-1)!\{(t-x)_+^{m-1} - \mathfrak{I}_t^*[(t-x)_+^{m-1}]\} \\ &= \frac{(-1)^m}{(m-1)!}\left\{(t-x)_+^{m-1} - \sum_{i=0}^{m-1} a_i(x)\frac{t^i}{i!} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=0 \\ e_{i,j}=1}}^{m-1} a_{i,j}(x)\frac{(t-x_i)_+^{m-1-j}}{(m-1-j)!}\right\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

für $t \in (-1, +1)$. k_x ist also ein Spline vom Grad $m-1$, und $k_x^{(q)}$ besitzt höchstens Unstetigkeitsstellen in X_{m-1-q} $(q = 0,..., m-2)$ bzw. $\{x\} \cup X_0$ $(q = m-1)$.

Wir definieren nun, was wir unter einer Nullstelle von $k_x^{(q)}$, $q = 0,..., m-1$, verstehen wollen. Dabei bezeichne $[a_q, b_q]$ das kleinste Intervall, auf dessen Komplement $k_x^{(q)}$ identisch verschwindet, I_q die Gesamtheit der maximalen linksoffenen und rechtsabgeschlossenen Teilintervalle von (a_q, b_q), auf denen $k_x^{(q)}$ identisch verschwindet, $J_q := [a_q, b_q]\backslash I_q$.

Definition 3.1. $k_x^{(q)}$, $q = 0,..., m-1$, besitzt in $y \in J_q$ eine *stetige Nullstelle*, falls $k_x^{(q)}|_{J_q}$ in y stetig ist und den Wert 0 annimmt, *Sprung-*

Nullstelle, falls $k_x^{(q)}|_{J_q}$ in y unstetig ist und das Vorzeichen wechselt, *Nullstelle*, falls $k_x^{(q)}$ in y eine stetige Nullstelle oder eine Sprung–Nullstelle hat.

Als Vielfachheit α einer Nullstelle y von $k_x^{(q)}$ bezeichnen wir die maximale Anzahl aufeinanderfolgender Ableitungen $k_x^{(q)},\ldots, k_x^{(q+\alpha-1)}$, für die $k_x^{(q)},\ldots, k_x^{(q+\alpha-2)}$ in y eine stetige Nullstelle und $k_x^{(q+\alpha-1)}$ eine Nullstelle besitzt.

Es ist zu betonen, dass Vorzeichenwechsel als Nullstellen ungerader Ordnung charakterisiert sind. Sprung–Nullstellen haben stets die Ordnung 1.

Für $q = 0,\ldots, m-2$ nennen wir eine Sprung–Nullstelle y von $k_x^{(q)}$ monoton, falls $k_x^{(q+1)}$ in einer Umgebung von y das Vorzeichen nicht wechselt (also auch, falls $k_x^{(q+1)}$ in einer Umgebung von y identisch verschwindet). Eine monotone Sprung–Nullstelle von $k_x^{(q)}$ kann deshalb keine Sprung–Nullstelle von $k_x^{(q+1)}$ sein. $k_x^{(m-1)}$ ist stückweise konstant und besitzt höchstens Sprung–Nullstellen.

In den folgenden Überlegungen bezeichne für $q = 0,\ldots, m-1$

Z_q die Anzahl der Nullstellen von $k_x^{(q)}$ im offenen Intervall (a_q, b_q) unter Berücksichtigung der Ordnung und für $q = 0,\ldots, m-2$

- m_q die Anzahl der Sprungstellen von $k_x^{(q)}$ in a_q und b_q plus die Anzahl der Sprung–Nullstellen von $k_x^{(q)}$, die nicht im offenen Intervall (a_{q+1}, b_{q+1}) liegen,
- $\bar{m}_q$ die Anzahl der nicht-monotonen Sprung–Nullstellen von $k_x^{(q)}$ im offenen Intervall (a_{q+1}, b_{q+1}),
- $\bar{\bar{m}}_q$ die Anzahl der monotonen Sprung–Nullstellen von $k_x^{(q)}$ im offenen Intervall (a_{q+1}, b_{q+1}).

$Z_q + 1 - m_q - \bar{m}_q - \bar{\bar{m}}_q$ ist gleich der Anzahl der Nullstellen von $k_x^{(q+1)}$, die auch stetige Nullstellen von $k_x^{(q)}$ sind, unter Berücksichtigung der Ordnung, vermehrt um die Anzahl der Intervalle $(y_1^{(q)}, y_2^{(q)})$ aus (a_{q+1}, b_{q+1}), deren Endpunkte aufeinanderfolgende stetige Nullstellen von $k_x^{(q)}$ oder die Punkte a_q, b_q sind, falls $k_x^{(q)}$ in a_q bzw. b_q stetig ist. Bezeichnet $\bar{r}_q(\bar{\bar{r}}_q)$ die Anzahl der nicht-monotonen (monotonen) Sprung–Nullstellen von $k_x^{(q)}$ und s_q bzw. s_{q+1} die Anzahl der Vorzeichenwechsel von $k_x^{(q)}$ bzw. $k_x^{(q+1)}$ in einem der Intervalle $(y_1^{(q)}, y_2^{(q)})$, so gilt (i) $s_q = \bar{r}_q + \bar{\bar{r}}_q$, da $k_x^{(q)}$ in $(y_1^{(q)}, y_2^{(q)})$ höchstens Sprung–Nullstellen besitzt, (ii) $s_{q+1} \geqslant \bar{r}_q$ nach Definition nicht-monotoner Sprung–Nullstellen und (iii) $s_{q+1} \equiv s_q + 1 \mod(2)$, wie eine einfache Fallunterscheidung zeigt: Ist z.B. s_q gerade, so besitzt $k_x^{(q)}$ rechts von $y_1^{(q)}$ und links von $y_2^{(q)}$ vorzeichengleiche Funktionswerte und folglich vorzeichenverschiedene Ableitungen, und s_{q+1} ist notwendig ungerade.

Hat $k_x^{(q)}$ keine monotonen Sprung–Nullstellen in $(y_1^{(q)}, y_2^{(q)})$, d.h. ist $\bar{\bar{r}}_q = 0$, so folgt $s_{q+1} \equiv \bar{r}_q + 1 \mod(2)$, und unter Berücksichtigung von (ii) erhalten wir sogar die Abschätzung $s_{q+1} \geqslant \bar{r}_q + 1 - \bar{\bar{r}}_q$. Diese Abschätzung ist aber offensichtlich auch dann richtig, falls $\bar{r}_q > 0$ ist. Summation über das ganze Intervall (a_{q+1}, b_{q+1}) liefert nunmehr in

$$Z_{q+1} \geqslant Z_q + 1 - m_q - 2\overline{m}_q, \qquad q = 0,\dots, m-2, \tag{3.3}$$

eine Abschätzung, die man als "Satz von Rolle für k_x" bezeichnen könnte. Wir erhalten schliesslich:

SATZ 3.2. *Für $x \in \{(-1, +1)\backslash X_0\}$ besitzt k_x in $(-1, +1)$*

$$Z_0 \leqslant Z_{m-1} + \sum_{q=0}^{m-2} m_q + 2 \sum_{q=0}^{m-2} \overline{m}_q - (m-1) \tag{3.4}$$

Nullstellen unter Berücksichtigung der Ordnung.

Die folgende Aussage zeigt, dass k_x auf keinem Teilintervall von (a_0, b_0) identisch verschwinden kann:

SATZ 3.3. *Für $x \in \{(-1, +1)\backslash X_0\}$ nimmt k_x auf (a_0, b_0) nur an diskreten Punkten den Wert 0 an.*

Beweis. Sei (y_1, y_2) ein Teilintervall von $(-1, +1)$, auf dem k_x identisch verschwindet. Wegen $x \notin X_0$ und der Darstellung (3.2) folgt $x \notin (y_1, y_2)$, und (y_1, y_2) ist deshalb ein Intervall vom Typ 1: $y_1 = x_{i_1}$ und $y_2 = x_{i_2} < x$ oder $y_2 = x$ oder vom Typ 2: $y_2 = x_{i_2}$ und $x < x_{i_1} = y_1$ oder $x = y_1$.

Für ein Intervall vom Typ 1 gilt aber $y_2 \leqslant a_0$. Um dies einzusehen, genügt es zu zeigen, dass k_x sogar auf dem Intervall $(-1, y_2)$ identisch verschwindet, falls $-1 < y_1$ ist. Offensichtlich verschwindet aber die Funktion $(t-x)_+^{m-1}$ auf $(-1, y_2)$. Deshalb gilt unter Berücksichtigung von (3.2) auch $\mathfrak{I}_t^*[(t-x)_+^{m-1}] = 0$ für $t \in (y_1, y_2)$. Auf $(-1, y_1)$ erhält man aber $\mathfrak{I}_t^*[(t-x)_+^{m-1}]$, indem man das von (J^*) auf $[-1, y_1]$ induzierte Interpolationsproblem betrachtet, wobei die Stetigkeitsforderungen für Splines $s \in S^*$ in den Ableitungen $s^{(j)}$ für $t = y_1$ als zusätzliche Interpolationsbedingungen zu werten sind. Dieses Interpolationsproblem, das wir für den Augenblick mit $(\tilde{J}^*)$ bezeichnen wollen, ist notwendig frei, sonst könnte (J^*) nicht frei sein. Folglich verschwindet $\mathfrak{I}_t^*[(t-x)_+^{m-1}]$ als Lösung des zu $(\tilde{J}^*)$ gehörenden homogenen Problems auch auf $(-1, y_1)$, so dass $k_x(t) = 0$ für alle $t \in (-1, y_2)$ gilt. Eine entsprechende Überlegung liefert für Intervalle (y_1, y_2) vom Typ 2 die Aussage $b_0 \leqslant y_1$. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Durch

$$\begin{aligned} x_{i_1-1} < a_0 = x \leqslant x_{i_1} \leqslant x_{i_2} = b_0 \quad &\text{(Fall 1) oder} \\ a_0 = x_{i_1} < x < x_{i_2} = b_0 \quad &\text{(Fall 2) oder} \\ a_0 = x_{i_1} \leqslant x_{i_2} \leqslant x = b_0 < x_{i_2+1} \quad &\text{(Fall 3)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

ist jedem $x \in \{(-1, 1) \setminus X_0\}$ ein eindeutig bestimmtes Indexpaar $(i_1, i_2)_x$, $0 \le i_1 \le i_2 \le n-1$, zugeordnet. Weiter bezeichnen wir mit E_x die aus E nach den folgenden Vorschriften gebildete Inzidenzmatrix:

1. Ist $x_i < x < x_{i+1}$ für ein $i \in \{0, \dots, n\}$, so füge man zwischen den beiden zu x_i und x_{i+1} gehörenden Zeilen von E eine zu x gehörende Zeile $(1, 0, 0, \dots, 0)$ ein; ist $x = x_i$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ (ist also $x_i \in X_0$), so ersetze man $e_{i,0} = 0$ durch eine Eins.

2. Man streiche alle Zeilen von E, die zu Knoten $x_i \notin [a_0, b_0]$ gehören.

Wir zeigen nun, dass die von Lorentz [8, Theorem 1] bewiesene Abschätzung auch dann gültig ist, falls unsere Art der Nullstellenzählung zugrunde gelegt wird:

SATZ 3.4. *Es sei (J) frei und $x \in \{(-1, 1) \setminus X_0\}$. g_x bezeichne die Anzahl der gestützten ungeraden Sequenzen in E_x, und $(i_1, i_2)_x$ sei das in* (3.5) *definierte, zu k_x gehörende Indexpaar. Dann besitzt der Kern k_x in (a_0, b_0)*

$$Z_0 \le \sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=0}^{m-1} e_{i,j} - g_x - m \tag{3.6}$$

Nullstellen unter Berücksichtigung der Ordnung.

Beweis. Jede Unstetigkeitsstelle von $k_x^{(q)}$, $q \in \{0, \dots, m-1\}$, wird durch eine entsprechende Eins in der $(m-1-q)$-ten Spalte von E_x beschrieben. Diese Tatsache verwenden wir, um $M := Z_{m-1} + \sum_{q=0}^{m-2} m_q + 2\sum_{q=0}^{m-2} \overline{m}_q$ abzuschätzen.

Sei $e_{i,j} = e_{i,j+1} = \cdots = e_{i,j+l-1} = 1$ eine zu x_i gehörende (maximale) Sequenz von E_x (d.h. $j = 0$ oder $e_{i,j-1} = 0$ bzw. $j+l = m$ oder $e_{i,j+l} = 0$). Ist $j = 0$, so nennen wir diese Sequenz eine Hermite-Sequenz.

Die Sequenz liefert in M einen additiven Beitrag von $f_{i,j} + f_{i,j+1} + \cdots + f_{i,j+l-1}$ mit

$f_{i,k} = 2$, falls $k > 0$ ist und $k_x^{(m-1-k)}$ in $x_i \in (a_{m-k}, b_{m-k})$ eine monotone Sprung-Nullstelle besitzt (in diesem Fall ist offensichtlich $e_{i,k}$ durch zu a_{m-k} und b_{m-k} gehörende Einsen gestützt);

$f_{i,k} = 1$, falls $k > 0$ ist und $k_x^{(m-1-k)}$ in $x_i \in \{(a_{m-1-k}, b_{m-1-k}) \setminus (a_{m-k}, b_{m-k})\}$ eine Sprung-Nullstelle besitzt, oder
falls $k > 0$, $x_i = a_{m-1-k}$ oder $x_i = b_{m-1-k}$ ist und $k_x^{(m-1-k)}$ in x_i unstetig ist, oder
falls $k = 0$ ist und $k_x^{(m-1)}$ in x_i eine Sprung-Nullstelle besitzt;

$f_{i,k} = 0$, sonst.

Ist $l > 1$ und $f_{i,k} = 2$ mit $k > j$, so folgt $f_{i,k-1} = 0$, da $k_x^{(m-k)}$ in x_i keine Sprung–Nullstelle besitzen kann und da $x_i \neq a_{m-k}$ und $x_i \neq b_{m-k}$ gilt. Ebenso erhalten wir im Fall $l > 1$, $f_{i,k} = 2$, $k < j + l - 1$, dass $f_{i,k+1} = 0$ ist, da (a_{m-1-k}, b_{m-1-k}) in (a_{m-2-k}, b_{m-2-k}) enthalten ist. Die Sequenz liefert also einen Beitrag

$\leqslant l$, falls l gerade ist oder falls es sich um eine Hermite-Sequenz handelt, und

$\leqslant l + 1$, falls l ungerade ist und falls es sich nicht um eine Hermite-Sequenz handelt.

Tritt der ungünstigste Fall ein, dass die Sequenz einen Beitrag von $l + 1$ liefert, so gilt $j > 0$, $f_{i,j} = 2$ und die Sequenz ist in E_x gestützt.

Offensichtlich lässt sich unsere Argumentation auch auf die zu x gehörende Hermite-Sequenz von E_x übertragen.

Für die beiden zu a_{m-1} und b_{m-1} gehörenden Hermite-Sequenzen (man beachte, dass $k_x^{(m-1)}$ stückweise konstant ist) erhalten wir eine bessere Abschätzung, da die erste Eins offensichtlich in Z_{m-1} nicht gezählt wird und eine eventuell auftretende nachfolgende Eins höchstens in m_{m-2} berücksichtigt, also höchstens mit dem Gewicht 1 versehen wird. Diese beiden Sequenzen liefern deshalb in M einen additiven Beitrag $\leqslant l - 1$, falls l wiederum die Länge der Sequenz bezeichnet.

Summation über alle in E_x auftretenden Sequenzen liefert unter Berücksichtigung der Aussage, dass E_x genau $\sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=0}^{m-1} e_{i,j} + 1$ Einsen enthält, die Abschätzung

$$Z_{m-1} + \sum_{q=0}^{m-2} m_q + 2 \sum_{q=0}^{m-2} \overline{m}_q \leqslant \sum_{i=i_1}^{i_2} \sum_{j=0}^{m-1} e_{i,j} - 1 + g_x ,$$

und die Behauptung folgt aus Satz 3.2.

Zum Beweis dieses Satzes haben wir eine Idee von Lorentz [8] auf unsere Betrachtungen übertragen. Sein Theorem 1 und unsere Aussage unterscheiden sich jedoch wesentlich in der Art der Nullstellenzählung und lassen sich aufgrund der folgenden Überlegung nicht direkt miteinander vergleichen: Sei $s(t) = c_1(y_1 - t)_+ + c_2(y_1 - t)_+^0 + c_3(t - y_2)_+$, $y_1 < y_2$, $c_1c_3 > 0$. Ist $c_1c_2 > 0$, so besitzt s nach Lorentz die einfache unstetige Nullstelle (y_1, y_2), während unsere Betrachtungsweise keine Nullstelle liefert. Ist $c_2 = 0$, so hat s nach Lorentz die einfache stetige Nullstelle (y_1, y_2), während wir in diesem Fall y_1 als doppelte Nullstelle charakterisiert haben. Für $c_1c_2 < 0$ liefern beide Betrachtungsweisen dieselbe Nullstellenvielfachheit 1. Dies zeigt, dass jede der beiden Abschätzungen in gewissen Grenzfällen schärfer sein kann als die andere.

4. Hermite Probleme

Der Sonderfall $m = 1$ liefert das Problem der Interpolation durch Treppenfunktionen, das offensichtlich genau dann frei ist, wenn die Interpolationsknoten durch die Splineknoten getrennt werden. In den folgenden Betrachtungen sei stets $m \geqslant 2$.

Unter einem Hermite-Problem (J) oder (J^*) verstehen wir ein Interpolationsproblem mit Knoten (1.1) und Inzidenzmatrizen (1.2) unter der Zusatzvoraussetzung, dass

$$\left.\begin{aligned} e_{i,j} &= 1 \quad \text{für} \quad j = 0,\dots, n_i - 1 \\ &= 0 \quad \text{für} \quad j = n_i ,\dots, m - 1 \end{aligned}\right\}, 0 < n_i \leqslant m,\ i = 0,\dots, n + 1$$

und (4.1)

$$\left.\begin{aligned} e^*_{p,q} &= 1 \quad \text{für} \quad q = 0,\dots, k_p - 1 \\ &= 0 \quad \text{für} \quad q = k_p ,\dots, m - 1 \end{aligned}\right\}, 0 < k_p \leqslant m,\ p = 0,\dots, k + 1$$

gilt. Die Bedingungen (1.3)–(1.5) und (1.8) lauten damit:

$$n_0 + k_0 = n_{n+1} + k_{k+1} = m; \tag{4.2}$$

$$x_i = z_p \ \Rightarrow n_i + k_p \leqslant m; \tag{4.3}$$

$$m + \sum_{p=1}^{k} k_p = \sum_{i=0}^{n+1} n_i\,; \tag{4.4}$$

$$m + \sum_{\substack{p=1 \\ x_{i_1} < z_p < x_{i_2}}}^{k} k_p \geqslant \sum_{i=i_1}^{i_2} n_i \tag{4.5}$$

für alle Paare i_1, i_2 mit $0 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant n + 1$.

Für die eindeutige Lösbarkeit von Hermite-Problemen ist (4.5) nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, da diese Bedingung äquivalent ist zu der von Karlin [5, Chap. X, Theorem 1.1] gegebenen "interlacing condition." In unseren weiteren Betrachtungen fordern wir die "strikte Verschränkheitsbedingung":

> In (4.5) gelte Gleichheit allein für das Indexpaar $(i_1, i_2) = (0, n + 1)$. (4.6)

(4.6) hat zur Folge, dass keines der Interpolationsprobleme, die durch Einschränkung von (J) auf $[x_{i_1}, x_{i_2}]$ mit $(i_1, i_2) \neq (0, n + 1)$ entstehen, frei ist.

SATZ 4.1. *Unter den Voraussetzungen* (4.1)–(4.6) *sind die folgenden Aussagen äquivalent*:

a. $k = 0$ *oder* $k_p \equiv 0 \bmod(2)$ *für* $p = 1,\ldots, k$.

b. *Für beliebiges* $x \in [-1, +1]$ *besitzt* k_x *auf* $(-1, +1)$ *keinen Vorzeichenwechsel.*

c. *Für beliebiges* $f \in C^m[-1, +1]$ *und* $x \in [-1, +1]$ *gilt*

$$f(x) - \mathfrak{I}_x(f, x) = (-1)^m K^*(x) f^{(m)}(\zeta(f, x)) \tag{4.7}$$

mit $\zeta(f, x) \in (-1, +1)$.

Beweis. a. $\leftrightarrow$ b. Für $x \in X_0 = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ verschwindet k_x identisch. Ist $x \in \{[-1, +1] \backslash X_0\}$, so besitzt E_x nur Hermite-Sequenzen, und aus Satz (3.4) folgt unter Anwendung von (4.5): $Z_0 \leqslant \sum_{p=1, x_{i_1} < z_p < x_{i_2}}^{k} k_p$. Dabei bezeichnet $(i_1, i_2)_x$ das in (3.5) definierte, zu x gehörende Indexpaar. Nach Satz 3.3 kann k_x auf keinem Teilintervall von (x_{i_1}, x_{i_2}) identisch verschwinden, und aus der Darstellung (3.2) erhält man, dass $k_x^{(q)}$, $q = 0,\ldots, k_p - 1$, in z_p, $p \in \{1,\ldots, k\}$, stetig ist und den Wert 0 annimmt. Folglich hat k_x in $z_p \in (x_{i_1}, x_{i_2})$ eine Nullstelle der Ordnung $\geqslant k_p$. Wir erhalten also $Z_0 = \sum_{p=1, x_{i_1} < z_p < x_{i_2}}^{k} k_p$ und damit Gleichheit in allen verwendeten Abschätzungen, insbesondere auch Gleichheit in (4.5). Die strikte Verschränktheitsbedingung (4.6) liefert nunmehr $(i_1, i_2)_x = (0, n + 1)$ unabhängig von $x \in \{[-1, +1] \backslash X_0\}$, und die Äquivalenz von a. und b. folgt, weil der Kern k_x in $(a_0, b_0) = (-1, +1)$ das Vorzeichen genau dann nicht ändert, wenn er nur Nullstellen gerader Ordnung in diesem Intervall hat.

b. $\leftrightarrow$ c. Unter Verwendung von (2.7) und (1.7*) folgt $\int_{-1}^{+1} k(x, t)\, dt = (-1)^m K^*(x)$. Der Rest ist bekanntlich eine Standardargumentation.

Bevor wir zu der zu Satz 4.1 dualen Aussage kommen, sei erwähnt, dass die duale Verschränktheitsbedingung

$$m + \sum_{\substack{i=1 \\ z_{p_1} < x_i < z_{p_2}}}^{n} n_i \geqslant \sum_{p=p_1}^{p_2} k_p \tag{4.5*}$$

für alle Paare p_1, p_2 mit $0 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant k + 1$ unter der Voraussetzung (4.6) ebenfalls strikt ist. Mit der Schreibweise $k_x{}^*(t) := k^*(x, t)$ erhalten wir somit:

SATZ 4.2. *Unter den Voraussetzungen* (4.1)–(4.6) *sind die folgenden Aussagen äquivalent*:

a. $n = 0$ *oder* $n_i \equiv 0 \bmod(2)$ *für* $i = 1,\ldots, n$.

b. *Für beliebiges* $x \in [-1, +1]$ *besitzt* k_x^* *auf* $(-1, +1)$ *keinen Vorzeichenwechsel.*

c. *Für beliebiges* $f \in C^m[-1, +1]$ *und* $x \in [-1, +1]$ *gilt*

$$f(x) - \mathfrak{J}_x^*(f, x) = (-1)^m K(x) f^{(m)}(\eta(f, x)) \tag{4.7*}$$

mit $\eta(f, x) \in (-1, +1)$.

(4.7) und (4.7*) sind Fehlerdarstellungen vom Cauchy-Typ, in die der Peano–Kern der jeweils dualen Quadraturformel multiplikativ eingeht. In den Fällen der Polynominterpolation ($k = 0$ bzw. $n = 0$) sind diese Darstellungen hinlänglich bekannt.

KOROLLAR 4.3. *Sei* (4.1)–(4.6) *erfüllt. Falls die zu* (J) *bzw.* (J^*) *gehörenden Interpolationsfehler die Darstellungen* (4.7) *bzw.* (4.7*) *besitzen, haben die Peano–Kerne* K^* *bzw.* K *im Intervall* $[-1, +1]$ *maximale Nullstellenzahl.*

Beweis. Wir zeigen die Aussage für den Kern K^* in (4.7), der gemäss Korollar 2.3 die Darstellung $K^*(x) = (-1)^m/m! \{x^m - \mathfrak{J}_x(x^m)\}$ besitzt. Da alle k_p gerade sind, hat K^* nach Micchelli [9] höchstens $m + k_1 + k_2 + \cdots + k_k$ Nullstellen. Aber K^* besitzt an den Interpolationsknoten $x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}$ schon insgesamt $n_0 + n_1 + \cdots + n_{n+1}$ stetige Nullstellen, und die Behauptung folgt wegen (4.4).

ERKENNTLICHKEIT

Für wertvolle Ratschläge danke ich Herrn Prof. Dr. G. G. Lorentz herzlich.

LITERATUR

1. K. ATKINSON AND A. SHARMA, A partial characterization of poised Hermite–Birkhoff interpolation problems, *SIAM J. Numer. Anal.* **6** (1969), 230–235.
2. G. D. BIRKHOFF, General mean value and remainder theorems with applications to mechanical differentiation and quadrature, *Trans. Amer. Math. Soc.* 7 (1906), 107–136.
3. D. FERGUSON, The question of uniqueness for G. D. Birkhoff interpolation problems, *J. Approximation Theory* **2** (1969), 1–28.
4. S. KARLIN, "Total Positivity," Vol. 1. Stanford University Press, Stanford, California, 1968.
5. S. KARLIN, Best quadrature formulas and interpolation by splines satisfying boundary conditions, *in* "Approximations with Special Emphasis on Spline Functions" (I. J. Schoenberg, Ed.), pp. 447–466. Academic Press, New York, 1969.
6. S. KARLIN AND J. KARON, On Hermite-Birkhoff interpolation, *J. Approximation Theory* **6** (1972), 90–114.
7. G. G. LORENTZ AND K. ZELLER, Birkhoff interpolation, *SIAM J. Numer. Anal.* **8** (1971), 43–48.

8. G. G. LORENTZ, Zeros of splines and Birkhoff's kernel, *Math. Z.* **142** (1975), 173–180.
9. C. MICCHELLI, The fundamental theorem of algebra for monosplines with multiplicities, *in* "Linear Operators and Approximation" (P. L. Butzer, J. P. Kahane, and B. Sz.-Nagy, Ed.), pp. 419–430. Birkhäuser–Verlag, Basel–Stuttgart, 1972.
10. I. J. SCHOENBERG, On Hermite–Birkhoff interpolation, *J. Math. Anal. Appl.* **16** (1966), 538–543.
11. I. J. SCHOENBERG, A second look at approximate quadrature formulae and spline interpolation, *Adv. in Math.* **4** (1970), 277–300.
12. A. SHARMA, Some poised and nonpoised problems of interpolation, *SIAM Rev.* **14** (1972), 129–151.